

2005.12.15
電気学会セミナー

電磁界解析のため電磁気学

Electromagnetism for Field Analysis

五十嵐一
北海道大学大学院 情報科学研究科

マクスウェルの方程式 1

アンペアの法則

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}_{\text{all}} \\ &= \mu_0 (\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_m + \mathbf{J}_d)\end{aligned}$$

$$\mathbf{J}_0 \text{ ----- 強制電流 (電流源による電流)}$$

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \text{ ----- 伝導電流}$$

$$\mathbf{J}_m = \text{rot } \mathbf{M} \text{ ----- 磁化電流}$$

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad \text{変位電流} = \text{真空の変位電流} + \text{分極電流}$$

磁性体の効果を左辺に押し込めると

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_d$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (\text{a})$$

マクスウェルの方程式2

磁性体の磁気特性に以下の形を仮定する

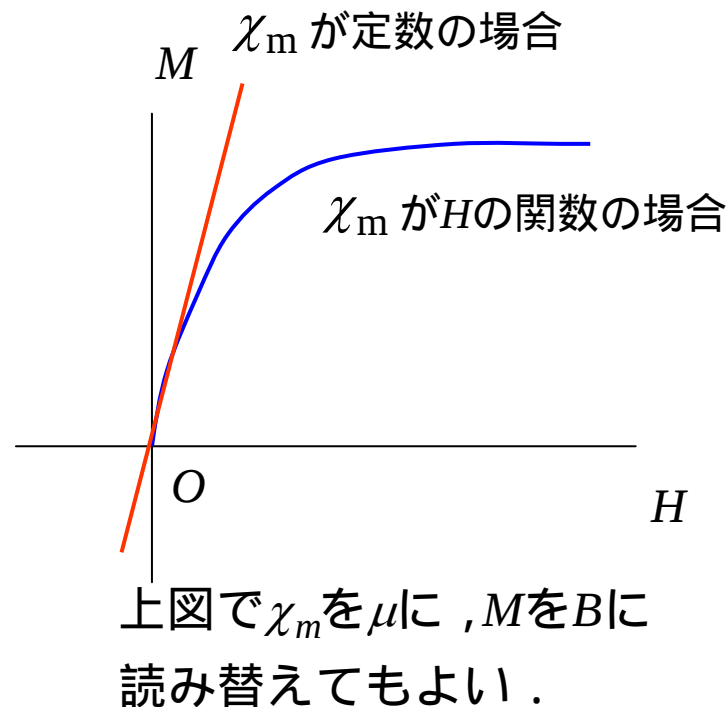
$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

このとき

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \\ &= \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \\ &= \mu \mathbf{H}\end{aligned}$$

したがって

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{b})$$



(b)式では $\mathbf{H}=0$ のとき $\mathbf{B}=0$ だからヒステリシスがある場合には使用できず, (a)を用いる必要がある。

マクスウェルの方程式3

ガウスの法則

誘電体の効果を左辺に押し込めると

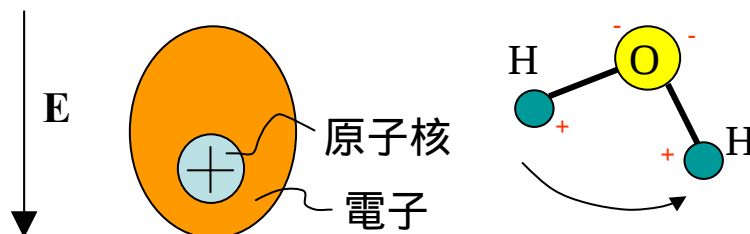
$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{all}}}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_t \quad (7)$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ &= \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \\ &= \varepsilon \mathbf{E} \end{aligned} \quad (8)$$

ρ_t ----- 真電荷: 外部に取り出せる電荷 ex. 自由電子, 電子ビーム

$\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}$ 分極電荷: 外部に取り出せない. 誘電分極すなわち束縛された電子, 原子核の変位や極性分子の回転による見かけの電荷.



マクスウェルの方程式4

磁束密度は無発散 (ソレノイダル, 管状)

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (9)$$

マクスウェルの方程式

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (10a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_t \quad (10c)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (10d)$$

構成関係式

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (11a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \cong \mu \mathbf{H} \quad (11b)$$

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \quad (11c)$$

マクスウェル方程式の解釈 1

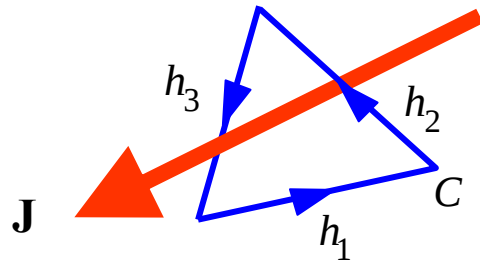
アンペアの法則(静磁界)

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_0$$

面 S で積分



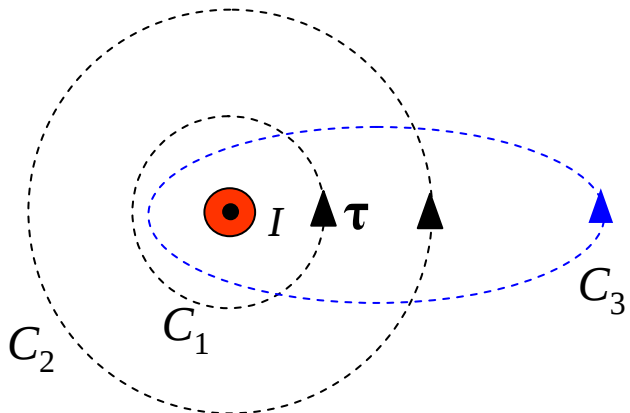
$$\int_C \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \\ = I$$



閉曲線 C をたとえば3つに分割すると

$$h_1 + h_2 + h_3 = I$$

ただし $h_1 \equiv \int_{l_1} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} dl$ 他も同様



H は電流からの距離 r に逆比例し,
積分路の長さは r に比例する.

$$\int_{C_1} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \frac{I}{2\pi r} 2\pi r = I, \quad \int_{C_2} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \frac{I}{2\pi r'} 2\pi r' = I$$

さらに一般の積分路でも $\int_{C_3} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = I$

マクスウェル方程式の解釈 2

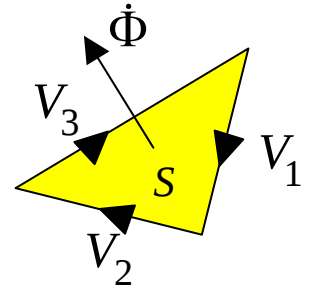
ファラデーの法則

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

面 S で積分



$$V_1 + V_2 + V_3 = -\frac{d\Phi}{dt}$$



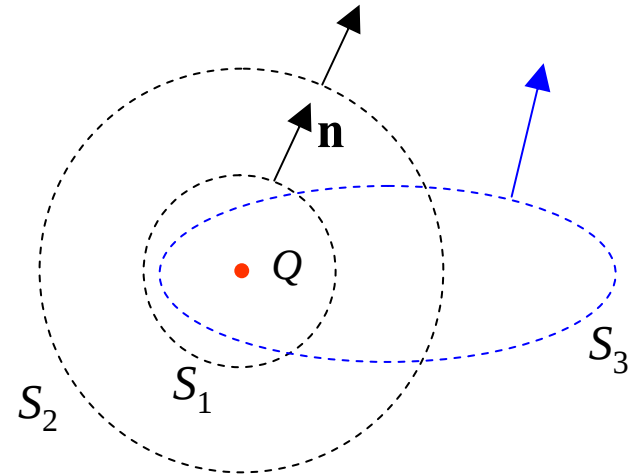
磁束の変化を妨げる起電力が発生する

ガウスの法則

体積 v で積分

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_t \quad \Rightarrow \quad \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q$$

D は電荷からの距離の2乗 r^2 に逆比例し、
積分面の面積は r^2 に比例する。



$$\int_{S_1} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{4\pi r^2} 4\pi r^2 = Q, \quad \int_{S_2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{4\pi r'^2} 4\pi r'^2 = Q$$

さらに一般の積分面でも

$$\int_{S_3} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q$$

準定常電磁界

quasi-static electromagnetic field

静的(static): 時間変化が無い

定常(steady state): 時間変化が一定もしくは周期的

時間変化が正弦的な場合

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \left(1 + j \frac{\omega \varepsilon}{\sigma} \right) \mathbf{E} \qquad \text{rot } \mathbf{E} = -j \omega \mu \mathbf{H}$$

伝導電流 変位電流 $\Rightarrow$ 準定常近似では変位電流を無視する

$f = \omega / 2\pi = 1[\text{MHz}]$ とすると

	$\sigma [\text{S/m}]$	ε_r	$\omega \varepsilon / \sigma$
金属	$10^6 \sim 10^7$	1	$10^{-10} \sim 10^{-11}$
半導体 (Si)	$10^{-4} \sim 10^5$	10	$1 \sim 10^{-9}$
誘電体(絶縁体)	10^{-10}	$10 \sim 10^3$	$10^{18} \sim 10^{20}$

特性時間：拡散時間と緩和時間 1

簡単のため σ と μ が一定だとする

(1) 磁界の拡散時間

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right. \longrightarrow \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = D \nabla^2 \mathbf{B} \\ D \equiv \frac{1}{\sigma \mu} \end{array} \longrightarrow B_x = \frac{B_0}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

拡散時間

$$\tau_m = \frac{d^2}{4D} = \frac{1}{4} \sigma \mu d^2$$

d は特徴的な距離

(2) 電荷の緩和時間

電荷保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho = 0 \longrightarrow \rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$$

緩和時間

$$\tau_{\text{relax}} = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

拡散時間と緩和時間 2*

*簡単のためソース電流を略す

(1) $\tau_{\text{relax}} \ll \tau_m$ の場合

準定常電磁界

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

(2) $\tau_{\text{relax}} \approx \tau_m$ の場合

フルセットの方程式

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

(3) $\tau_{\text{relax}} \gg \tau_m$ の場合

準定常電界

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0$$

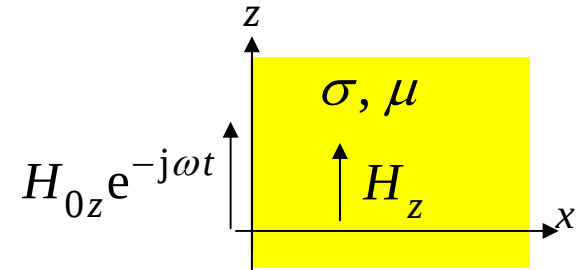
	$d = 1 \text{ [cm]}$		$d = 1 \text{ [}\mu\text{m]}$
	τ_{relax}	τ_m	τ_m
金属(非磁性)	10^{-28}	10^{-4}	10^{-12}
半導体(Si)	$10^{-6} \sim 10^{-16}$	$10^{-1} \sim 10^8$	$10^{-9} \sim 1$
誘電体	10	10^{-8}	10^{-16}

単位は秒

表皮厚

磁界の拡散方程式

$$\sigma\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \sigma\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}$$

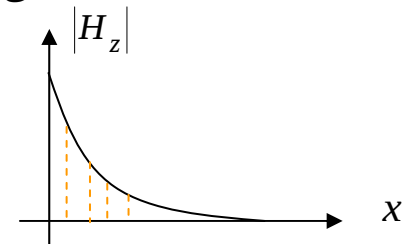


$$H_z = H_{0z} e^{\gamma x - j\omega t} \quad \text{と仮定すると}$$

$$\gamma^2 = j\omega\mu\sigma \quad \therefore \gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = e^{j\pi/4} \sqrt{\omega\mu\sigma} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

磁界は以下の特徴距離すなわち**表皮厚**で 1/e に減衰する

$$d = \frac{1}{\text{Re}(\gamma)} = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$

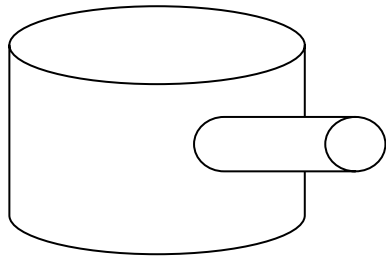


要素長は表皮厚よりも十分小さくなければならない

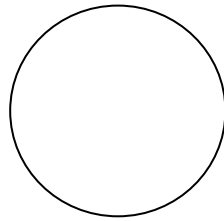
銅の場合: $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{H/m}], \sigma \approx 5 \times 10^7 [\text{S/m}]$

$f [\text{Hz}]$	50	10^{10}
$d [\text{m}]$	10^{-2}	0.7×10^{-6}

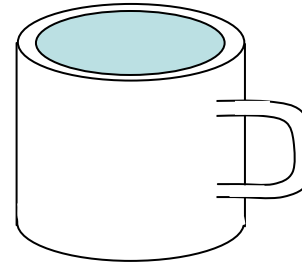
ポテンシャルとトポロジー



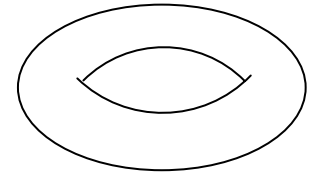
$\approx$



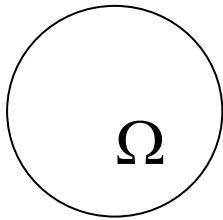
単連結領域



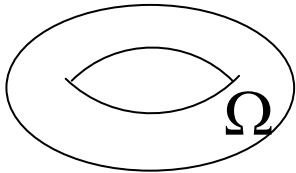
$\approx$



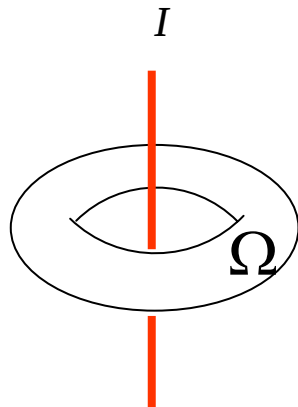
多重連結領域



$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{H} = -\text{grad } \phi$$



$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \not\longleftrightarrow \quad \mathbf{H} = -\text{grad } \phi$$



$\mathbf{H} = -\text{grad } \phi$ とすると

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = - \oint_C \text{grad } \phi \cdot \boldsymbol{\tau} dl = - \oint_C d\phi = 0$$

矛盾

アンペアの法則 $\oint_C \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = I$

ベクトルポテンシャル

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \begin{array}{c} \text{自明} \\ \longleftrightarrow \\ \text{ポアンカレの補題} \end{array} \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi) = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

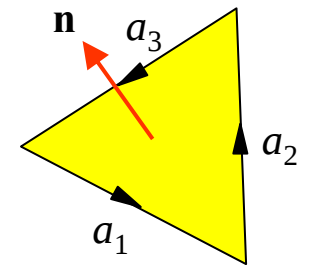
よりベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ には $\operatorname{grad} \varphi$ の任意性がある。

ストークスの定理より

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = a_1 + a_2 + a_3$$

磁束：
測定できる量

和は一意に決まる



ベクトルポテンシャルの任意性を反映して a_1, a_2, a_3 は従属となる

たとえば $a_2 = a_3 = 0$ としてもよい $\longrightarrow$ 木・補木ゲージ
ただし行列の条件が悪化するのであまり使用されない

準定常電磁界：A-V法

マクスウェル方程式(準定常)

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \xrightarrow{\quad \downarrow \quad} \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_c$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_c = 0$$

構成関係式

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H} = \nu \mathbf{B} \\ \mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \end{array} \right.$$

$$\operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}) + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \operatorname{grad} V = \mathbf{J}_0$$

$\downarrow$ div

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V) + \operatorname{div} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

←-- 従属な方程式

準定常電磁界：A-V法とA法

A-V法の有限要素法による離散形 ($\partial / \partial t \rightarrow j\omega$)

$$\begin{bmatrix} [C]^t[\nu][C] + j\omega[\sigma] & j\omega[\sigma][G] \\ j\omega[G]^t[\sigma] & j\omega[G]^t[\sigma][G] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C]^t[t] \\ 0 \end{bmatrix}$$

rot div = 0 に対応する関係 $[G]^t[C]^t = 0$ が離散形式でも成立する。
したがって、上式の第1式の左から $[G]^t$ を作用させると第2式が得られる。

➡ 従属変数を含む冗長な方程式

辺有限要素法を用いた場合

gradV で表現される関数は辺要素の基底 N_e で張られる空間の部分集合となる。

$$\text{grad } V \approx \{N_e\}^t [G] \{v\} \subset a \approx \{N_e\}^t \{a\}$$

したがって grad V を式から消去することができる。

A 法

$$\text{rot}(\nu \text{ rot } \mathbf{A}) + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_0$$

準定常電磁界：T-Ω法

マクスウェル方程式(準定常)

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_c = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{J}_c = \operatorname{rot} \mathbf{T}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_c \quad \xrightarrow{\quad \downarrow \quad} \quad \mathbf{H} = \mathbf{T} + \mathbf{T}_0 - \operatorname{grad} \Omega$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

ただし

$$\mathbf{J}_0 = \operatorname{rot} \mathbf{T}_0$$

で既知量

構成関係式

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{E} = \rho \mathbf{J}_c \end{array} \right.$$

$$\operatorname{rot}(\rho \operatorname{rot} \mathbf{T}) + \mu \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{T} + \mathbf{T}_0 - \operatorname{grad} \Omega) = 0$$

↓ div

$$\operatorname{div} \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{T} + \mathbf{T}_0 - \operatorname{grad} \Omega) \right\} = 0$$

←-- 従属な方程式

準定常電界

マクスウェル方程式(準定常電界)

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{div} \end{array}$$

$$\text{div}(\sigma \text{grad } \varphi) + \text{div}\left(\varepsilon \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0$$

移動物体の電磁誘導

全微分(Lagrange微分, 対流微分, 物質微分)

$$\begin{aligned}\frac{d f(x(t), y(t), z(t), t)}{d t} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } f\end{aligned}$$

f の時間変化 移動による変化

磁束の変化

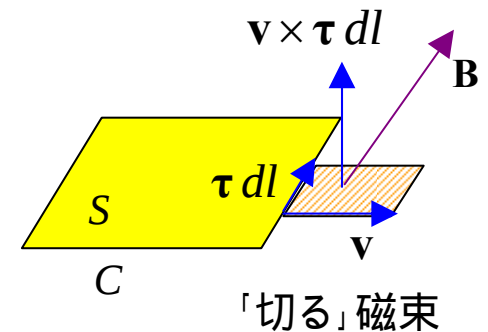
$$\frac{d \Phi}{d t} = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{B} \right) \cdot \mathbf{n} dS$$

ベクトル公式

$$\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \cancel{\mathbf{v} \text{ div } \mathbf{B}}^0 - \cancel{\mathbf{B} \text{ div } \mathbf{v}}^0 - \cancel{\mathbf{B} \cdot \text{grad } \mathbf{v}}^0 - \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{B}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{d \Phi}{d t} &= \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS - \oint_C \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau} dl \\ &= \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_C \mathbf{v} \times \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B} dl\end{aligned}$$



異方性

線形性を仮定する

x 方向に単位の電界を印加したとき,
 x, y, z 方向に生じる電束密度を

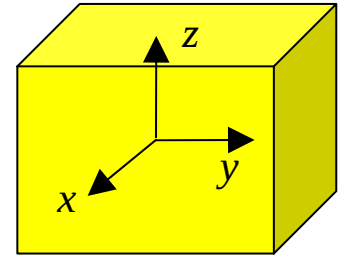
$$D_x = \varepsilon_{11}, D_y = \varepsilon_{21}, D_z = \varepsilon_{31}$$

と書く。(足文字 ij は原因 j により生じた結果 i という意味)
電界 E_x を印加すると, 線形性より

$$D_x = \varepsilon_{11}E_x, D_y = \varepsilon_{21}E_x, D_z = \varepsilon_{31}E_x$$

さらに, y 方向の電界と z 方向の電界の印加も考慮すると, 線形性より

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$



線形と非線形

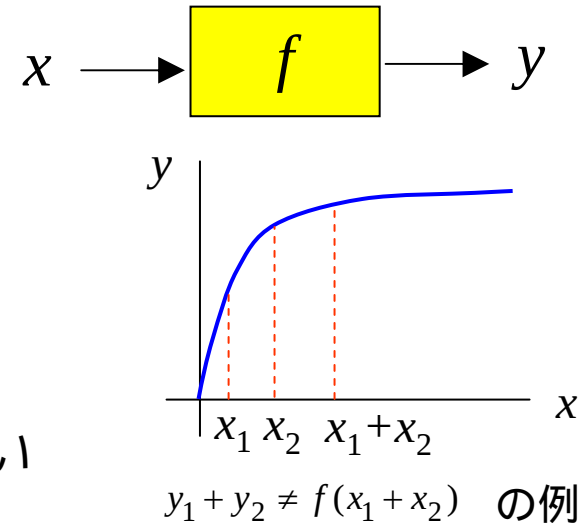
$y = f(x)$ で記述される系を考える

$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ のとき

線形系においては

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = f(a_1 x_1 + a_2 x_2)$$

たとえば $f(x) = x^2$ なら上式は成立しない



$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(u) \quad \text{の解として} \quad u(x,t) = \sum_n u_n(x) e^{jn\omega t} \quad \text{を仮定する}$$

$f(x)$ が線形なら

$e^{jn\omega t}$ の独立性

$$\sum_n \{jn\omega u_n - f(u_n)\} e^{jn\omega t} = 0 \quad \longrightarrow \quad jn\omega u_n = f(u_n)$$

$f(x)$ が非線形の場合, 高調波が生じてしまう $\longrightarrow$ 通常は時間差分を用いる

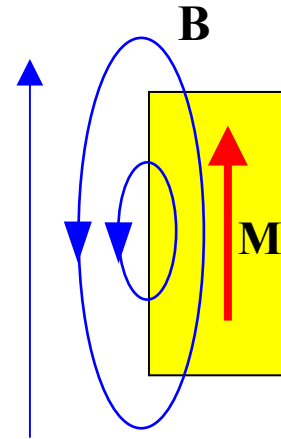
減磁と永久磁石の動作点1

磁界の接線成分の連続性より
磁性体内部で磁界は

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_d \\ &= \mathbf{H}_0 - N\mathbf{M} \quad (\text{X})\end{aligned}$$

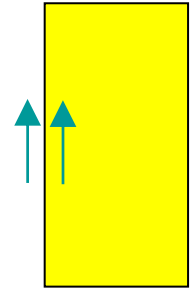
$\mathbf{H}_d$ 減磁力 (自己磁界)

N 減磁率 (磁性体の形状で決まる)



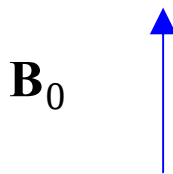
$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$$

一様な外部磁界

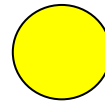


$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_d$$

磁界の接線成分の
連続性



$$N \approx 0$$



$$N = 1/3$$



$$N \approx 1$$

ヒステリシス性が無視できる場合, 磁性体内の磁界は

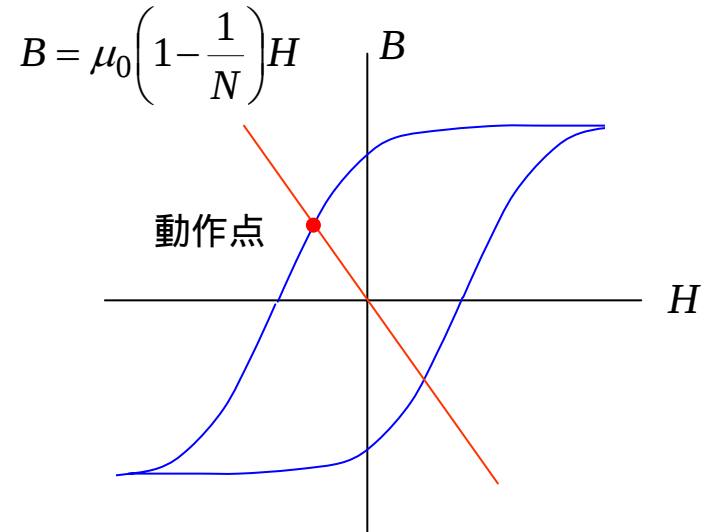
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \\ (\text{X})\text{式} \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{\mathbf{H}_0}{1 + N \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right)}$$

透磁率が高い
 N が大きい } $\mathbf{H}$ は小

減磁と永久磁石の動作点2

ヒステリシスがある場合の磁性体内部の磁束密度

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \\ &= \mu_0 \left\{ \left(1 - \frac{1}{N} \right) \mathbf{H} + \frac{1}{N} \mathbf{H}_0 \right\}\end{aligned}$$



外部磁界が消えると、反対方向の自己磁界のみが残る

電磁界のエネルギー 1

単位体積において単位時間に電磁界によってなされる仕事 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ はアンペアの法則によりつぎのように表現できる.

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

ベクトル公式とファラデーの法則より

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} \\ &= -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} \end{aligned}$$

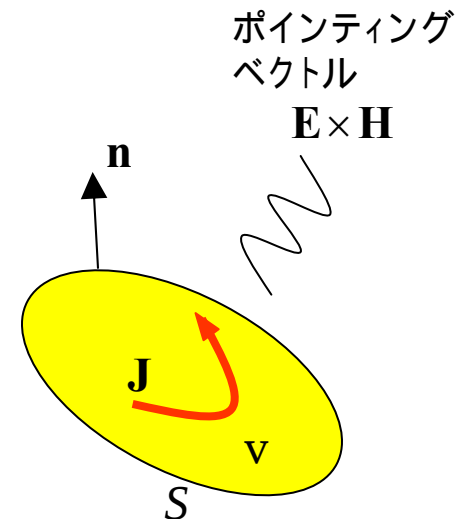
両式より, 体積 v について

$$\int_v \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dv = - \int_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS - \int_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$$

体積 V のエネルギーの増加

外部から与えられる
エネルギー

消費される
エネルギー



電磁界のエネルギー 2

体積Vのエネルギーの増加を書き換える

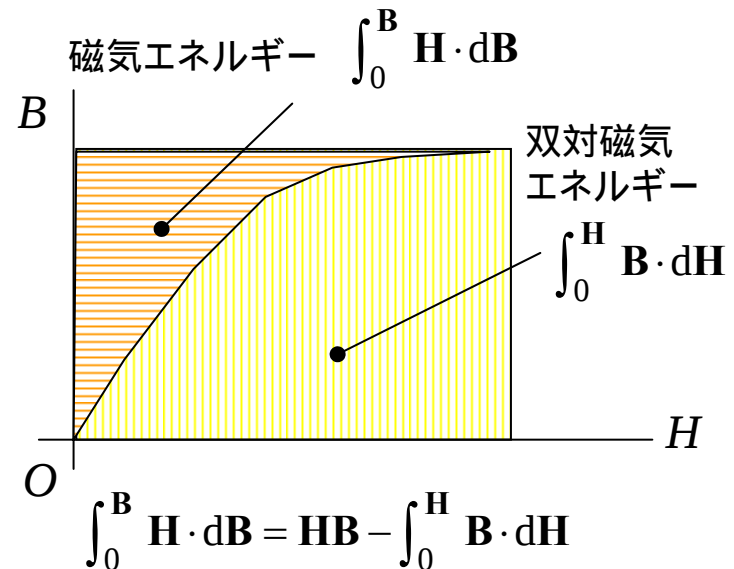
$$\begin{aligned}\int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \int_0^t \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \tau} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} \right) d\tau dV \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right) dV\end{aligned}$$

ただし

$$\int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \equiv \int_0^t \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \tau} d\tau \quad \text{電気エネルギー密度}$$

$$\int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \equiv \int_0^t \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} d\tau \quad \text{磁気エネルギー密度}$$

これらは電気と磁気エネルギー密度を表す(非線形材料はこれを用いる)



(ルジャンドル変換)

電磁界のエネルギー 3

材料が線形であるとき

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

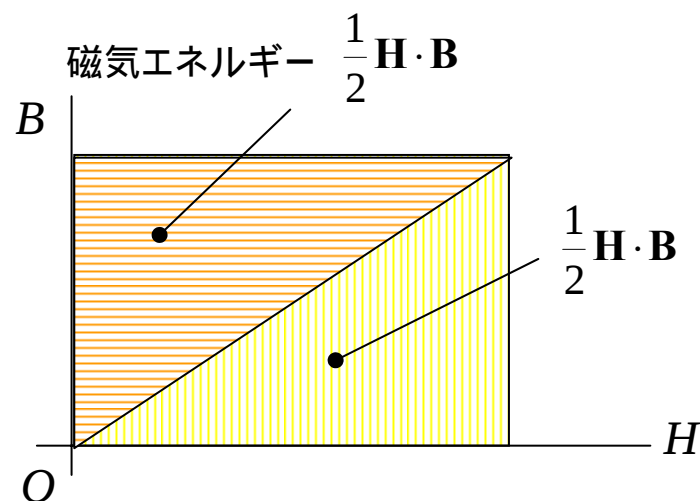
ε, μ は定数

このとき電気エネルギー密度は

$$\begin{aligned} \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{\mathbf{D}} d(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}{2\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \end{aligned}$$

同様に

$$\int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$



電磁界のエネルギー 4

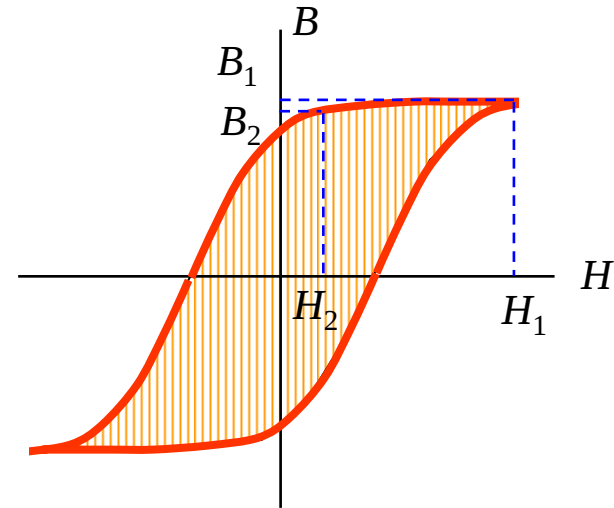
ヒステリシス曲線上の状態変化にともなう仕事

$$w = \int_{B_1}^{B_2} H dB = HB \Big|_{(B_2, H_2)}^{(B_1, H_1)} - \int_{H_1}^{H_2} B dH$$

ヒステリシス曲線を1周すると

$$w = -\oint B dH$$

ヒステリシス損失 = ヒステリシス曲線が囲む面積



周波数 f で磁界が周期的に変化すると, 単位時間にヒステリシス曲線を f 回まわるので

$$w \propto f B^2$$

一方, 周期的に変化する電磁界のジュール損は

$$w_{\text{joule}} = \frac{|\mathbf{J}|}{\sigma} \quad \text{および} \quad \text{rot } \mathbf{J}_c = -j\omega\sigma \mathbf{B}$$

より

$$w_{\text{Joule}} \propto \sigma f^2 B^2$$

電磁力 1

体積 v 中の電荷にはたらく力

$$\mathbf{F} = \int_v (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dv$$

$\rho = \text{div } \mathbf{D}$, $\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ を用いると

$$\mathbf{F} = \int_v \left(\mathbf{E} \text{div} \mathbf{D} - \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{H} + \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dv$$

さらに

$$\mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E} \quad \text{および} \quad 0 = \mathbf{H} \text{div} \mathbf{B}$$

を用いると

$$\mathbf{F} = \int_v \left[\mathbf{E} \text{div} \mathbf{D} - \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E} + \mathbf{H} \text{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \right] dv$$

電磁力 2

$$(\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} - \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H})_{\alpha} = \sum_{\beta} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}}$$

ただし $T_{\alpha\beta}$ は下記で定義される **マクスウェルの応力テンソル**

$$T_{\alpha\beta} \equiv E_{\alpha} D_{\beta} + H_{\alpha} B_{\beta} - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \delta_{\alpha\beta}$$

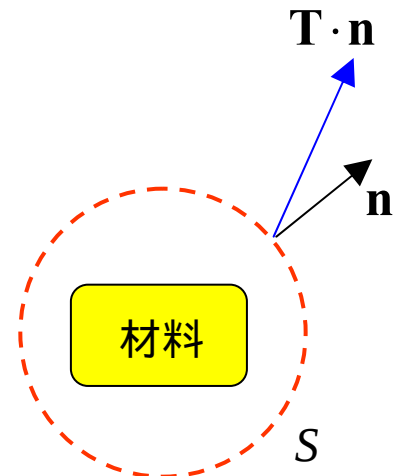
結局, 電磁力の成分は

$$F_{\alpha} = \sum_{\beta} \int_{\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} T_{\alpha\beta} d\mathbf{v} - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbf{v}} (\mathbf{D} \times \mathbf{B})_{\alpha} d\mathbf{v}$$

$$= \sum_{\beta} \oint_S T_{\alpha\beta} n_{\beta} dS - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbf{v}} (\mathbf{D} \times \mathbf{B})_{\alpha} d\mathbf{v}$$

応力テンソル

電磁運動量



電磁界の特異性

点 P における電位はラプラス方程式

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0$$

を満足する．境界条件を満足する解は

$$\varphi(r, \theta) = V + \sum_{m=1}^{\infty} a_m r^{m\pi/\beta} \sin\left(\frac{m\pi}{\beta} \theta\right)$$

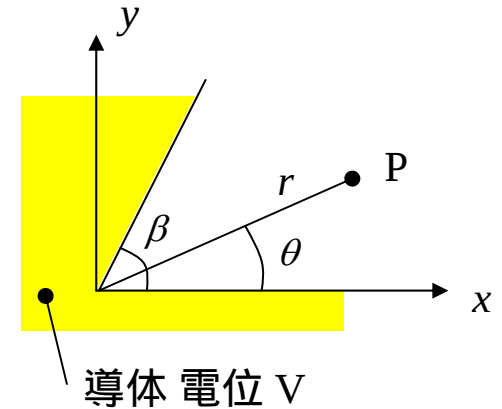
$$\approx V + a_1 r^{\pi/\beta} \sin\left(\frac{\pi}{\beta} \theta\right) \quad \leftarrow r \text{ が小さいとき}$$

よって電界は

$$|\mathbf{E}| \approx \frac{\pi a_1}{\beta} r^{\pi/\beta - 1}$$

$\beta > \pi$ すなわち導体が鋭角を持つ場合, $|\mathbf{E}| \rightarrow \infty$, as $r \rightarrow 0$

誘電体や磁性体の角でも同様 (線形性を仮定した場合)



*** J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons

物理学のための電磁気学の集大成．変数分離やグリーン関数，特殊関数を縦横に使い明快に議論されている．電磁流体プラズマや相対論，輻射の理論も含む．

** J. D. Stratton, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill

工学のための電磁気学の古典的名著．非線形物質の取り扱いや電磁ポテンシャル，積分方程式などの広範な議論を含む．

** 砂川重信，理論電磁気学，丸善

物理学のための電磁気学の名著．図が豊富．電磁エネルギーや多重極展開の議論などが参考になる．

* 中山正敏，物質の電磁気学，岩波

物質の議論に特化．電磁流体の電磁運動量など他に見られない議論を含む．

*C.T.A. Johnk, Engineering Electromagnetic Fields and Waves

わかりやすい図を豊富に含む．初等的．

* 本間，五十嵐，川口，数値電磁力学，森北

電磁気学から解析力学，辺有限要素法，境界要素法などを広く解説している．

** 五十嵐，亀有，加川，西口，ボサビ，新しい計算電磁気学，培風館

辺有限要素法の基礎的・理論的側面を中心に議論している．