

電気通信大学

数値解析研究会

2003年1月17日

電磁場の有限要素解析

- 特異行列への共役勾配法の適用 -

五十嵐 一

北海道大学大学院 工学研究科

内 容

- (1) 電磁界解析のための有限要素法
- (2) 静磁界問題
- (3) 準定常電磁界(うず電流場)
- (4) 結論

静磁界

Maxwellの方程式

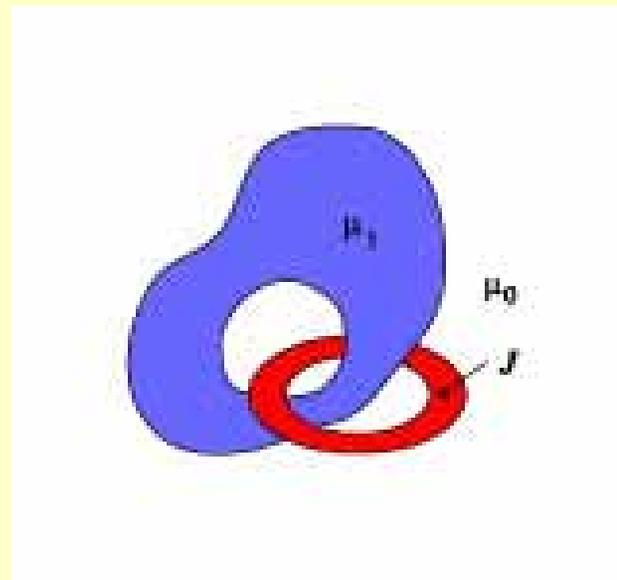
$$\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}$$

構成関係式

$$\mathbf{H} = \nu \mathbf{B} \quad (\nu = 1/\mu)$$

$$\text{curl}(\nu \text{curl } \mathbf{A}) = \mathbf{J}$$



ベクトルポテンシャルの任意性

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \text{curl}(\mathbf{A} + \text{grad}\chi) \\ &= \text{curl}\mathbf{A}\end{aligned}$$

クーロンゲージ

$$\text{div}\mathbf{A} = 0$$

両立性

$$\text{curl}(\nu \text{curl}\mathbf{A}) = \mathbf{J} \quad \longrightarrow \quad \text{div}\mathbf{J} = 0$$

有限要素法

支配方程式

$$\operatorname{curl}(\nu \operatorname{curl} \mathbf{A}) = \mathbf{J}$$

重み付き残差法

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \operatorname{curl}(\nu \operatorname{curl} \mathbf{A}) dv = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{J} dv$$

弱形式

$$\int_{\Omega} \nu \operatorname{curl} \mathbf{w} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{A} dv = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{J} dv$$

辺要素基底による補間

$$\mathbf{A} = \sum_e \mathbf{N}_e a_e$$

ガレルキン法

$$\mathbf{w} = \mathbf{N}_e$$

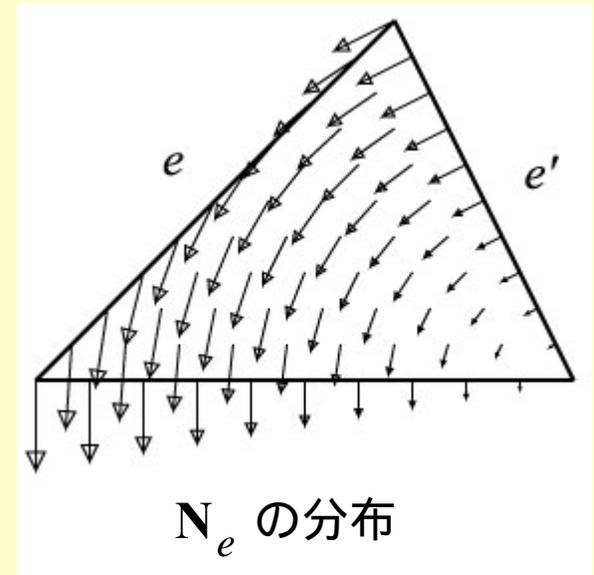
辺要素基底の性質

$$\mathbf{A} = \sum_e \mathbf{N}_e a_e$$

(1) 直交性

$$\int_{e'} \mathbf{N}_e \cdot d\mathbf{s} = \delta_{ee'}$$

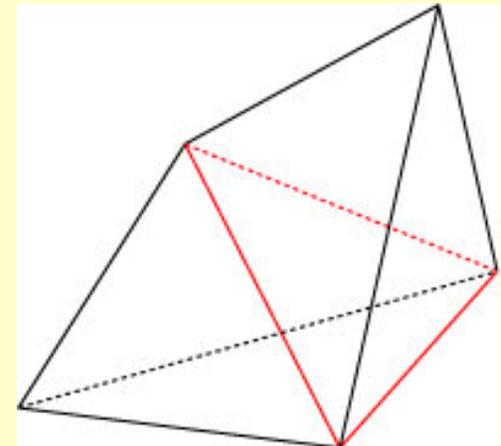
$$\longrightarrow a_e = \int_e \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$



(2) 他の面上では接線成分を持たない

\longrightarrow 要素境界面で \mathbf{A} の接線成分が連続

(法線成分は一般に不連続)



種々の有限要素

要素	補間	直交性	未知量	連続性
節点	$\varphi = \sum_n N_n \varphi_n$	$N_n(\mathbf{x}_{n'}) = \delta_{nn'}$	$\varphi(\mathbf{x}_n) = \varphi_n$	スカラー
辺	$\mathbf{A} = \sum_e \mathbf{N}_e a_e$	$\int_{e'} \mathbf{N}_e \cdot d\mathbf{s} = \delta_{ee'}$	$a_e = \int_e \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$	接線
面	$\mathbf{B} = \sum_f \mathbf{M}_f b_f$	$\int_{f'} \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{n} dS = \delta_{ff'}$	$b_f = \int_f \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$	法線

離散化

$$\sum_{e'} a_{e'} \int_{\Omega} \nu \operatorname{curl} \mathbf{N}_e \cdot \operatorname{curl} \mathbf{N}_{e'} dv = \int_{\Omega} \mathbf{N}_e \cdot \mathbf{J} dv$$

for $e = 1, 2, \dots, E$

(E: 全辺数)

有限要素方程式

$$[\mathbf{K}]\{a\} = \{J\}$$

$$K_{ee'} = \int_{\Omega} \nu \operatorname{curl} \mathbf{N}_e \cdot \operatorname{curl} \mathbf{N}_{e'} dv$$

$$J_e = \int_{\Omega} \mathbf{N}_e \cdot \mathbf{J} dv$$

チェーンの代数

辺の境界をとる操作

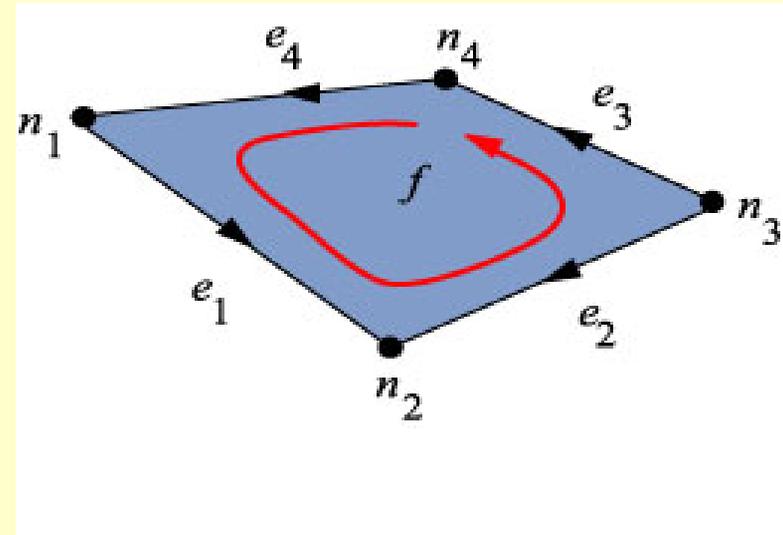
$$\partial e_1 = n_2 - n_1$$

$$\longrightarrow \partial e_1 = \sum_i G_{1i} n_i$$

ただし

$$G_{11} = -1, G_{12} = 1, G_{1i} = 0 \text{ for others}$$

すなわち $\{\partial e\} = [G]\{n\}$



面の境界をとる操作

$$\partial f = e_1 - e_2 + e_3 + e_4 \longrightarrow$$

$$= \sum_i C_{fi} e_i$$

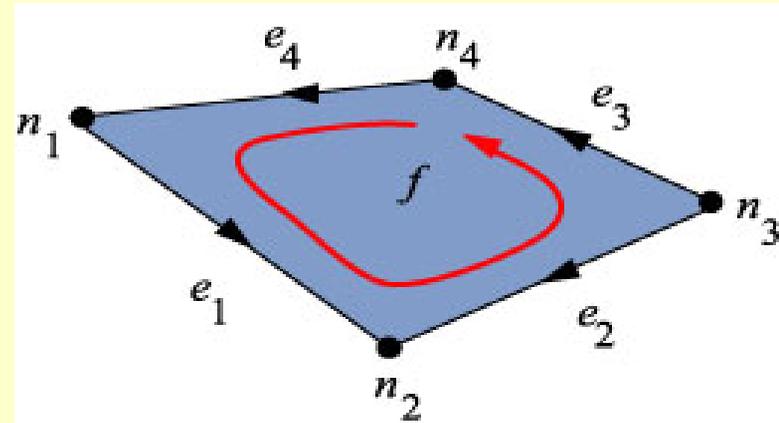
$$\{\partial f\} = [C]\{e\}$$

$$\{\partial v\} = [D]\{f\}$$

接続行列の性質

面の境界の境界

$$\begin{aligned}\partial\partial f &= \partial(e_1 - e_2 + e_3 + e_4) \\ &= n_2 - n_1 + n_3 - n_2 + n_4 - n_3 + n_1 - n_4 \\ &= 0\end{aligned}$$



すなわち

$$\begin{aligned}\partial\{\partial f\} &= \partial[C]\{e\} \\ &= [C]\{\partial e\} \\ &= [C][G]\{n\} \\ &= 0\end{aligned}$$



$$[C][G] = 0$$

同様に

$$[D][C] = 0$$

接続行列と微分作用素

$$[R][G] = 0$$

$$\text{rot grad} = 0$$

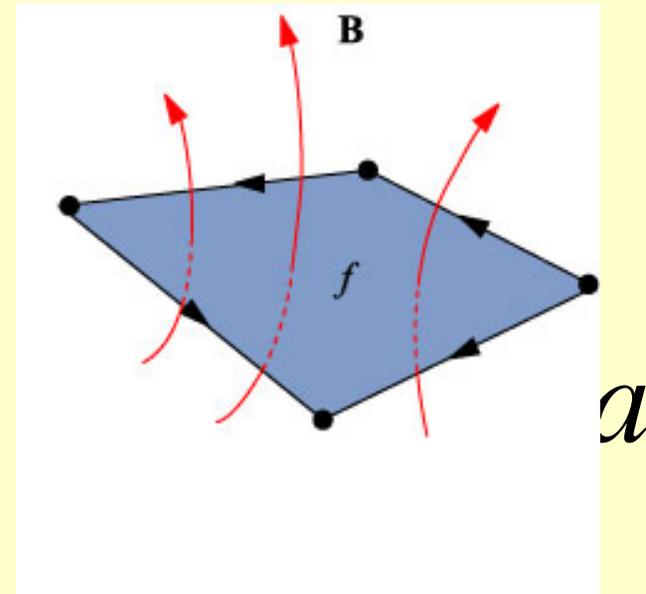
$$[D][R] = 0$$

$$\text{div rot} = 0$$



面 f を通る磁束

$$\begin{aligned} b_f &= \int_f \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_f \text{curl } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_{\sum_i C_{fi} e_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \sum_e C_{fe} \int_e \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \sum_e C_{fe} a_e \end{aligned}$$



$$\therefore b_f = \sum_e C_{fe} a_e \quad \longrightarrow \quad \{b\} = [C]\{a\} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}$$

同様に

$$\{e\} = -\partial_t \{a\} - [G]\{\partial_t \varphi\} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \text{grad}(\partial_t \varphi)$$

各基底間の関係

磁束密度

$$\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A} = \sum_e a_e \text{curl } \mathbf{N}_e$$

一方

$$\mathbf{B} = \sum_f \mathbf{M}_f b_f = \sum_f \mathbf{M}_f \int_f \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_f \mathbf{M}_f \int_{\partial f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

$$= \sum_f \mathbf{M}_f \left(\sum_e C_{fe} a_e \right) = \sum_e a_e \left(\sum_f C_{fe} \mathbf{M}_f \right)$$

$$\therefore \text{curl } \mathbf{N}_e = \sum_f C_{fe} \mathbf{M}_f$$

すなわち

$$\{\text{curl } \mathbf{N}\} = [C]^t \{\mathbf{M}\}$$



$$V_{\text{curl } \mathbf{N}} \subset V_{\mathbf{M}}$$

同様に

$$\{\text{grad } N\} = [G]^t \{\mathbf{N}\}$$

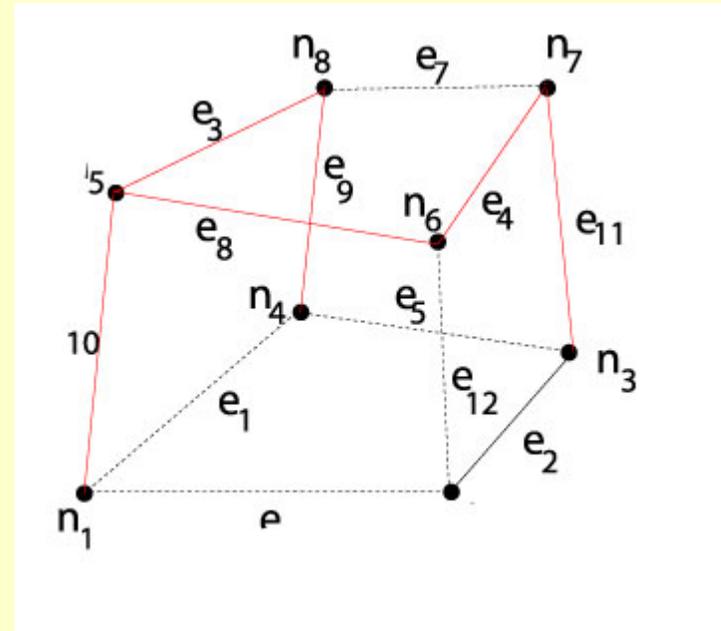


$$V_{\text{grad } N} \subset V_{\mathbf{N}}$$

接続行列のランク

有限要素メッシュのグラフ

節点数 N , 辺数 E , 面数 F , 要素数 V



独立な辺の数 $= N - 1$ (木の枝数)

$$\{\partial e\} = [G]\{n\}$$

$$\text{rank}[G] = N - 1$$

独立な面の数 $= E - N + 1$ (補木の枝数)

$$\{\partial f\} = [C]\{e\}$$

$$\text{rank}[C] = E - N + 1$$

有限要素行列の性質

$$[K]\{a\} = \{J\}$$

$$K_{ee'} = \int_{\Omega} \nu \operatorname{curl} \mathbf{N}_e \cdot \operatorname{curl} \mathbf{N}_{e'} dV$$

→ $[K] = [C]^t [\nu] [C] \quad : e \times e \text{ 行列}$

$[\nu]$: 対称正則 $f \times f$ 行列 $\nu_{ff'} = \int_{\Omega} \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{M}_{f'} dV$

$[C]$: $f \times e$ 行列

$$\operatorname{rank}[K] = \operatorname{rank}[C] = E - N + 1$$

静磁界の解析

支配方程式

$$\operatorname{curl}(\nu \operatorname{curl} \mathbf{A}) = \mathbf{J}$$

有限要素方程式

$$[K]\{a\} = \{J\}$$

ただし

$$[K] = [C]^t [\nu] [C]$$

$$\dim[K] = E$$

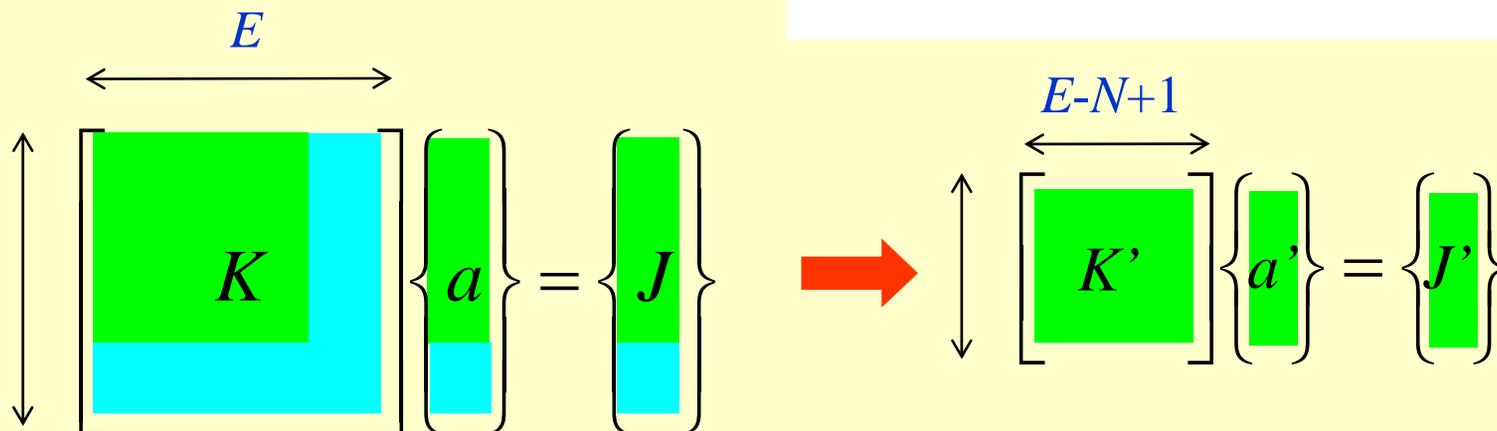
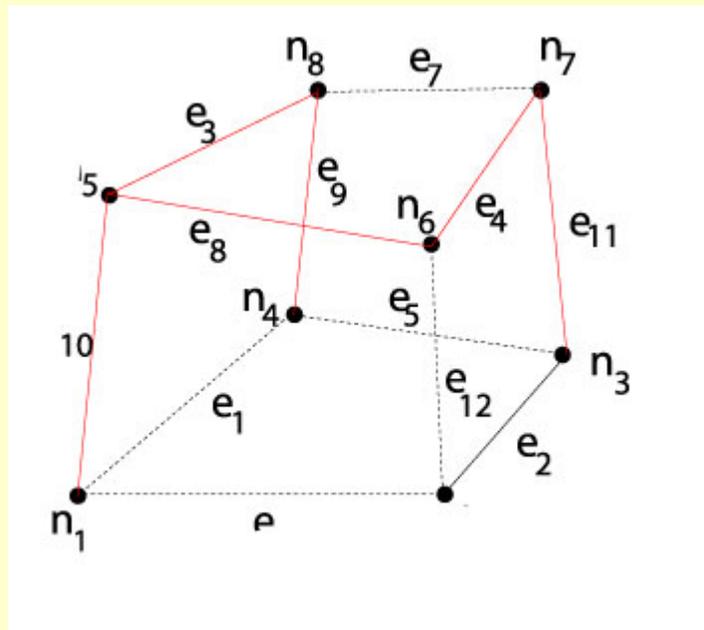
$$\operatorname{rank}[K] = E - N + 1$$

木・補木ゲージによる正則化

木の未知数を $a=0$ とする

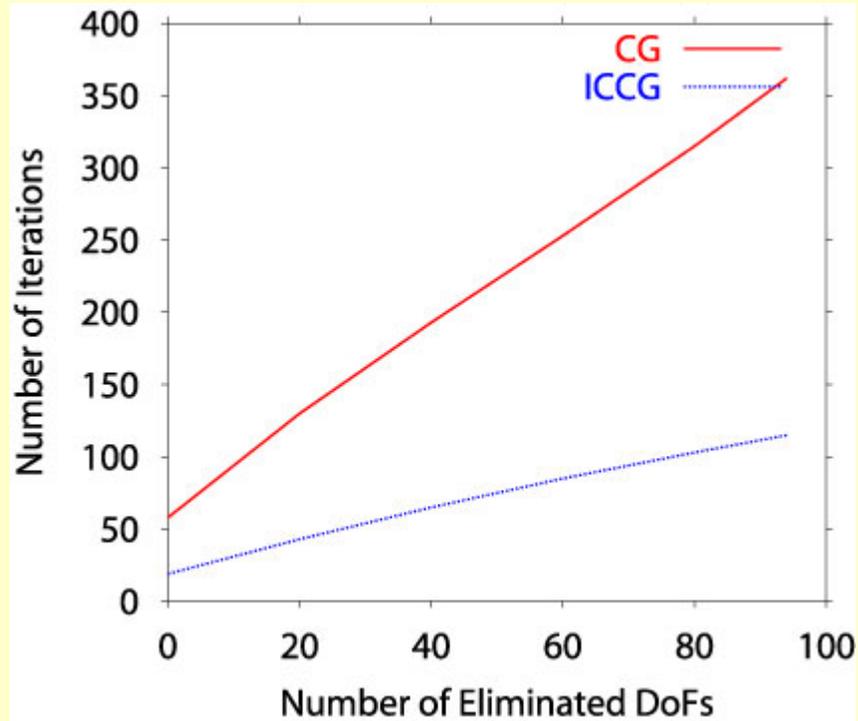
磁束(観測量)

$$b_f = \cancel{a_3}^0 + \cancel{a_4}^0 + a_7 + \cancel{a_8}^0$$

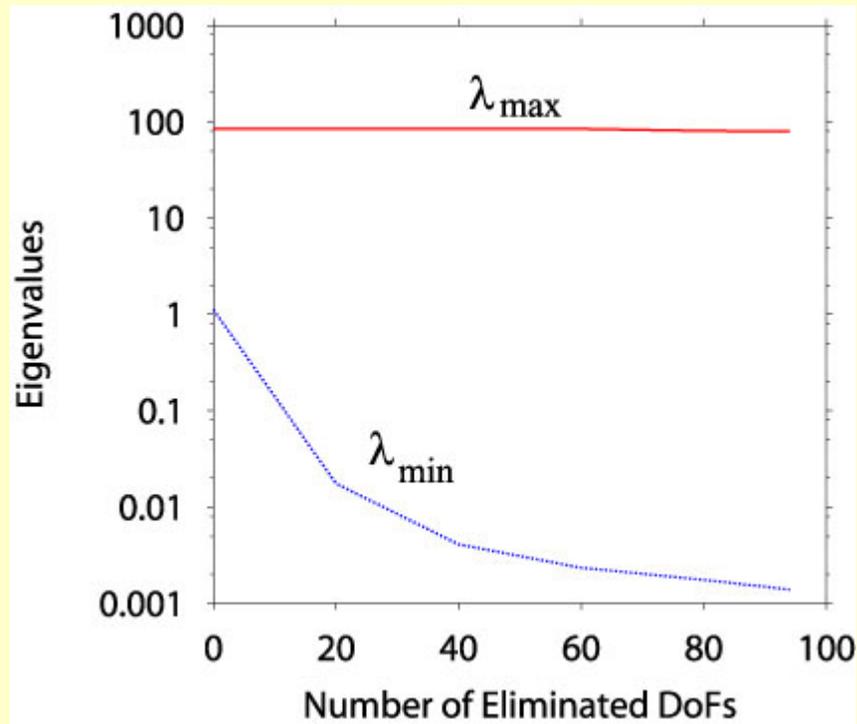


木の自由度消去

自由度消去とCG法の収束

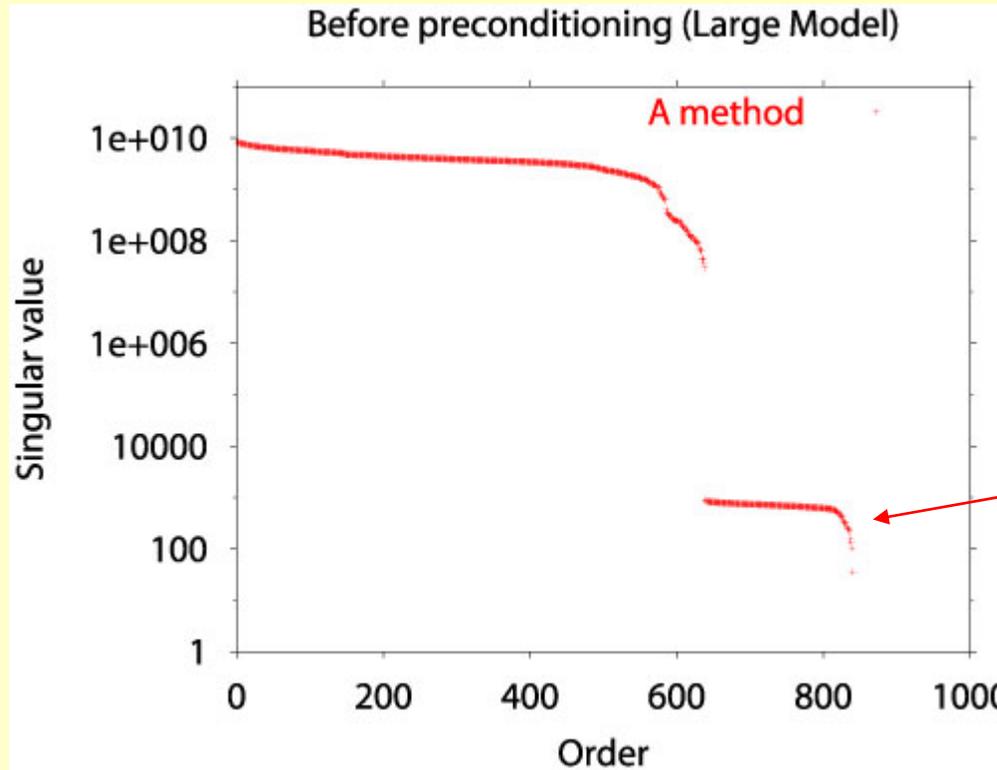


自由度消去と固有値，条件数



条件数 $\kappa = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$

固有値の分離性



固有値の分離性

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

λ_i :元の行列の固有値

μ_i :1自由度消去した行列の固有値

準定常場(うず電流場)解析

Maxwellの方程式

$$\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_e + j\omega\mathbf{D}$$

$$\text{curl } \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{J} = 0$$

構成関係式

$$\mathbf{J}_e = \sigma\mathbf{E}$$

$$\mathbf{H} = \nu\mathbf{B}$$

ポテンシャルの導入

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -j\omega(\mathbf{A} + \text{grad } V) \end{array} \right.$$

Maxwell方程式

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) + j\omega\sigma(\mathbf{A} + \nabla V) = \mathbf{J}$$

$$j\omega \nabla \cdot \sigma(\mathbf{A} + \nabla V) = 0$$

弱形式

補間

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{A} = \sum_e \mathbf{N}_e A_e & \text{(辺要素)} \\ V = \sum_n N_n V_n & \text{(節点要素)} \end{array} \right.$$

$$\int_{\Omega} \nu \operatorname{curl} \mathbf{N}_e \cdot \operatorname{curl} \mathbf{A} \, dv + j\omega \int_{\Omega} \sigma \mathbf{N}_e \cdot (\mathbf{A} + \operatorname{grad} V) \, dv = \int_{\Omega} \mathbf{N}_e \cdot \mathbf{J} \, dv$$

$$j\omega \int_{\Omega} \sigma \operatorname{grad} N_n \cdot (\mathbf{A} + \operatorname{grad} V) \, dv = 0$$

有限要素方程式 (A-V法)

$$[K'] \begin{Bmatrix} A \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[K'] \equiv \begin{bmatrix} [C]^t[v][C] + j\omega[\sigma] & j\omega[\sigma][G] \\ j\omega[G]^t[\sigma] & j\omega[G]^t[\sigma][G] \end{bmatrix}$$

$[v], [\sigma]$: 正定値行列

$$v_{ff'} = \int_{\Omega} \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{M}_{f'} dv$$

$$\sigma_{ee'} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_e \cdot \mathbf{N}_{e'} dv$$

有限要素行列

$$[K'] \equiv \begin{bmatrix} \overset{\text{E}}{\longleftarrow} & \overset{\text{N}}{\longleftarrow} \\ [C]^t[v][C] + j\omega[\sigma] & j\omega[\sigma][G] \\ j\omega[G]^t[\sigma] & j\omega[G]^t[\sigma][G] \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \text{E} \\ \updownarrow \text{N} \end{matrix}$$

$[C]$: discrete counterpart of **curl** ($C_{fe} = \pm 1, 0$)

$[G]$: discrete counterpart of **grad** ($G_{en} = \pm 1, 0$)

$$\text{curl grad} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad [C][G] = 0$$

$$\text{rank}[K'] = E \quad (\because [G]^t[C]^t = 0)$$

冗長変数 V の消去- A法-

$$V_{\text{grad } N} \subset V_N$$

$V_{\text{grad } N}$: 節点基底の勾配 $\text{grad } N_n$ が張る空間

V_N : 辺基底 N が張る空間

$\text{grad } V$ を N で表現できる  V の消去

Reduced (regularized) system

$$[K]\{A\} = \{J\}$$

$$[K] \equiv [C]^t [\nu][C] + j\omega[\sigma]$$

A法の有限要素行列

$$[K] \equiv [C]^t [\nu][C] + j\omega[\sigma]$$

$$\dim([C]^t [\nu][C]) = e$$

$$\text{rank}([C]^t [\nu][C]) = e - n + 1$$

(グラフの補木の枝数)

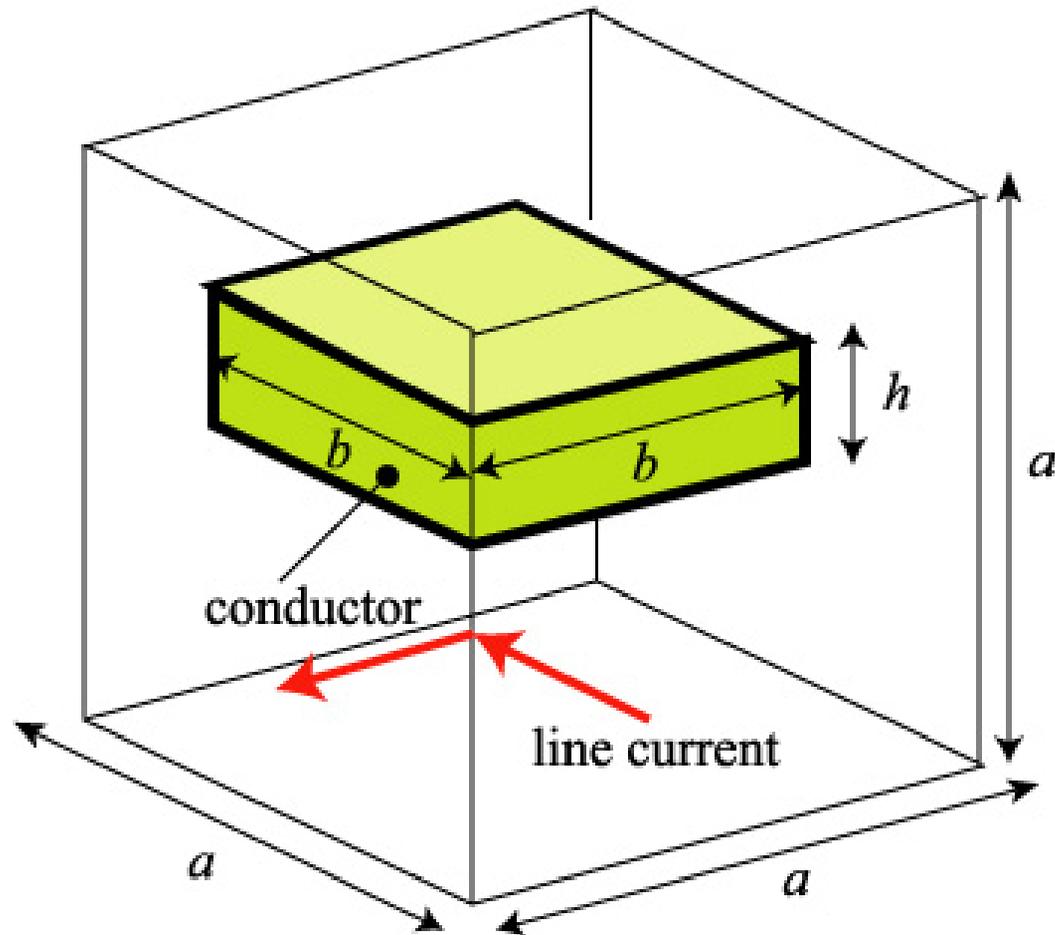
$$\sigma\omega \rightarrow 0 \quad [K] \quad \text{singular}$$

条件数と特異値

準定常場解析の場合

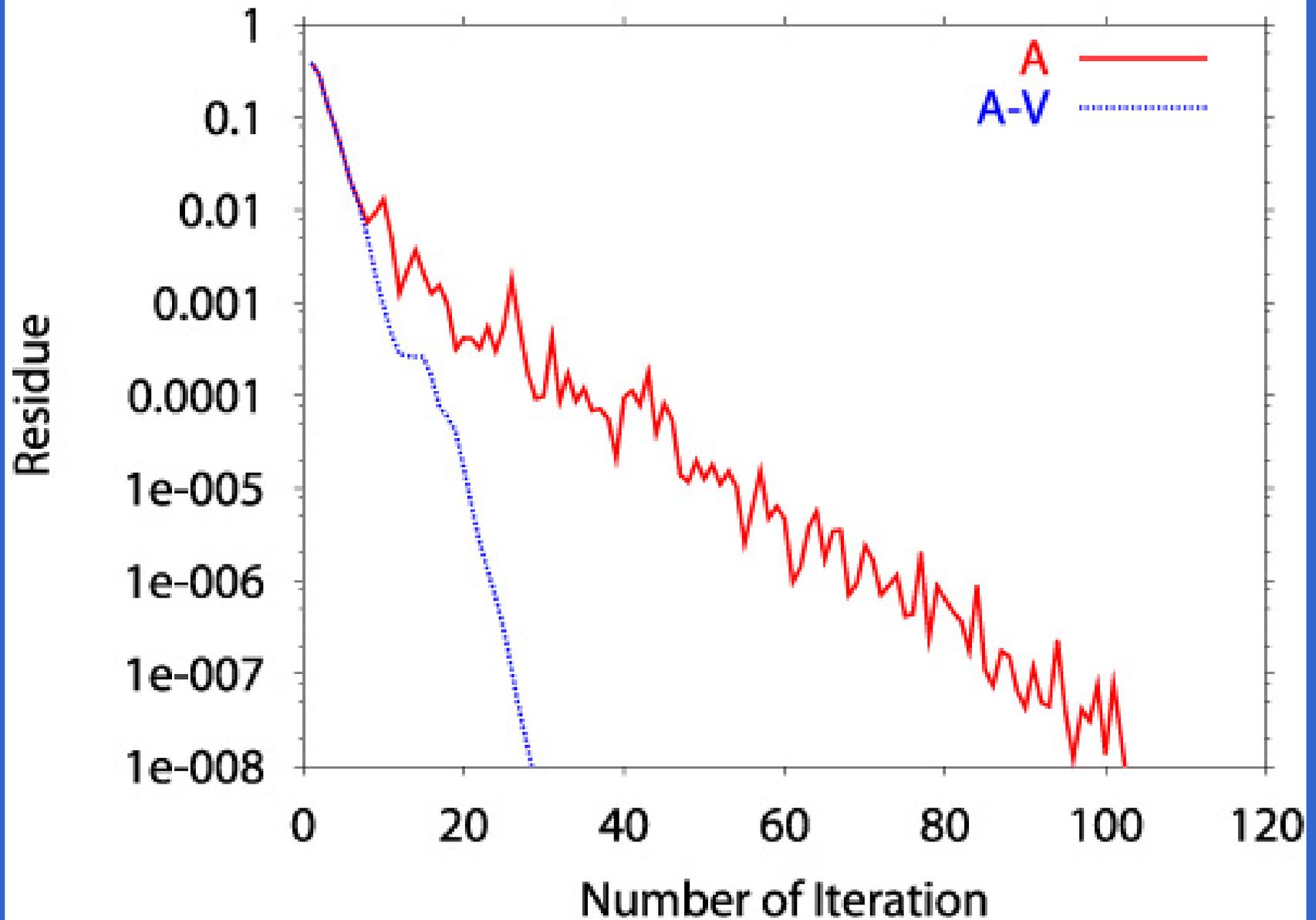
特異値 $[K]^*[K]\{x\} = \sigma^2\{x\}$

条件数 $\kappa = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}^0}$

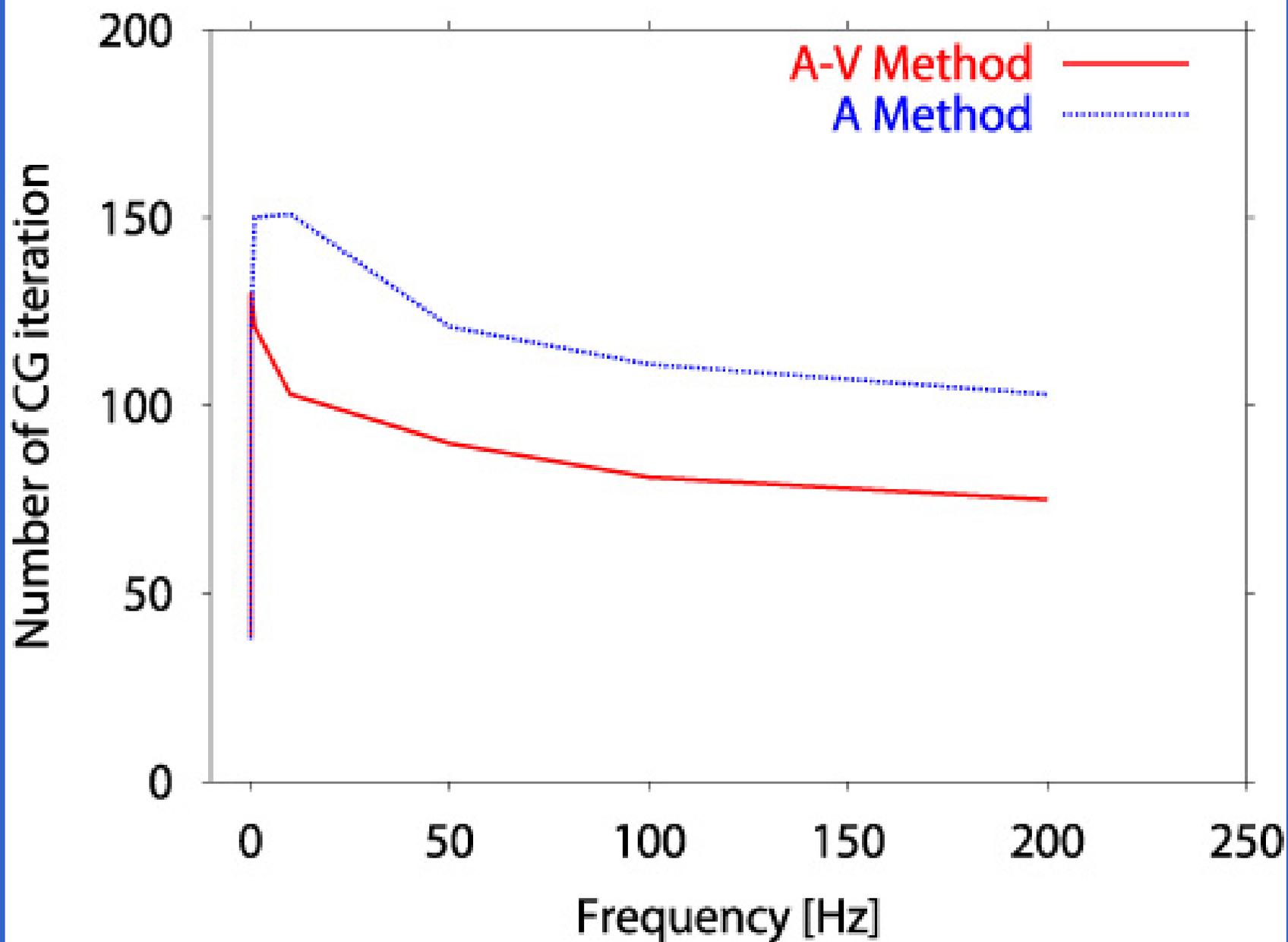


**Metallic plate above closed line current
(Hano model 1/8)**

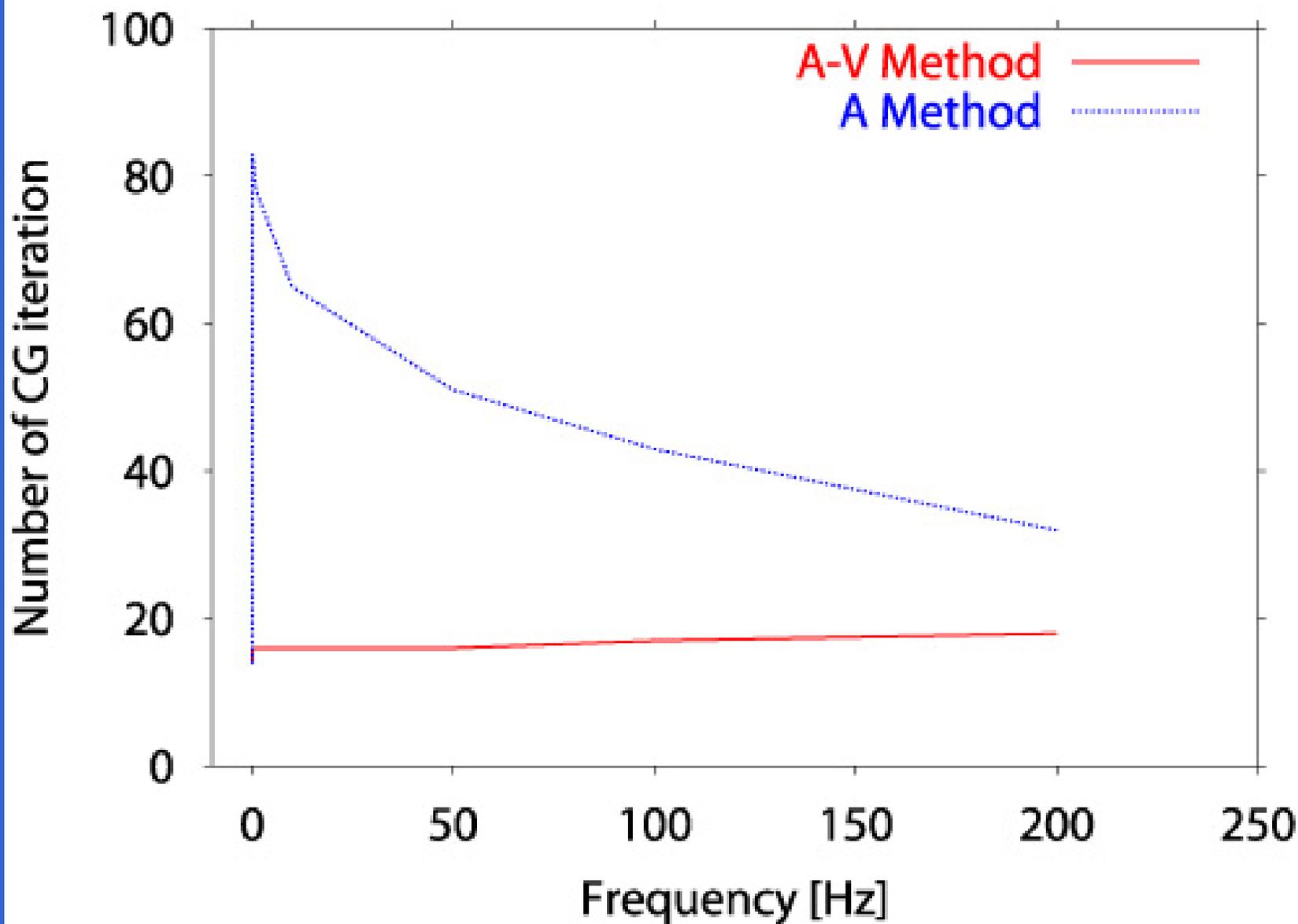
thickness: 20mm, f=50Hz

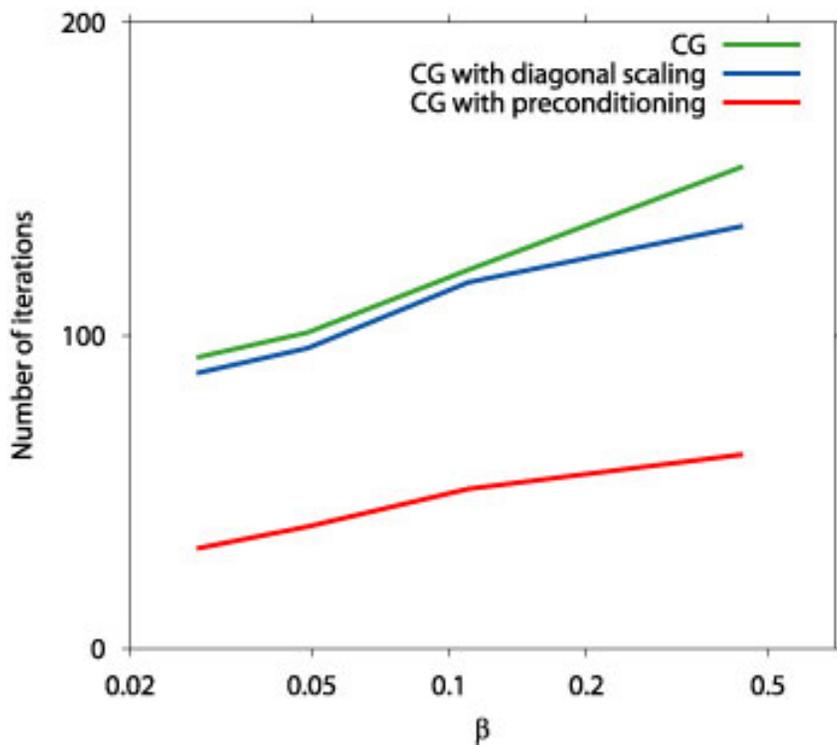


Convergence of CG

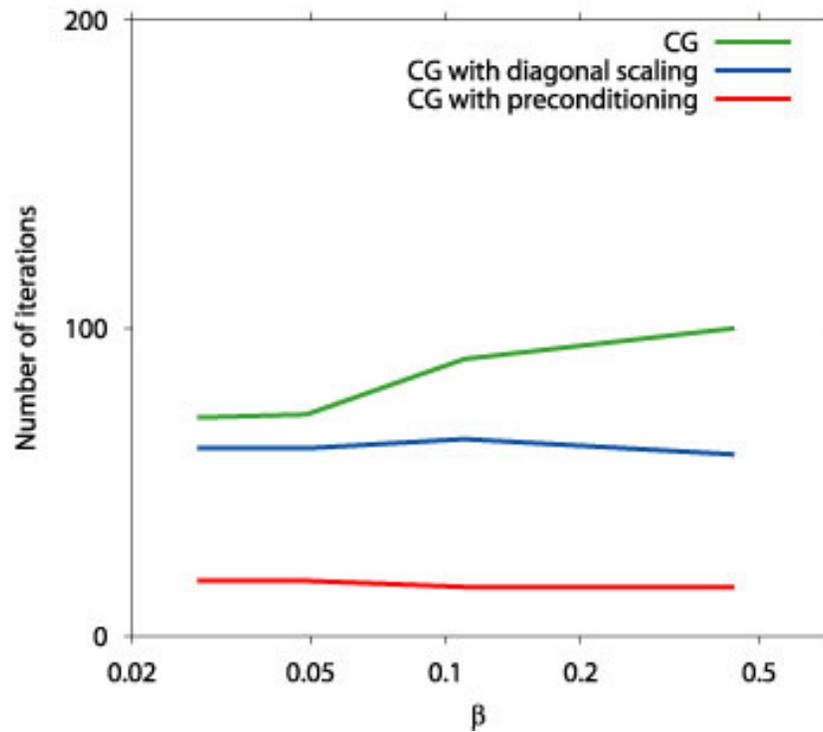


Convergence of ICCG

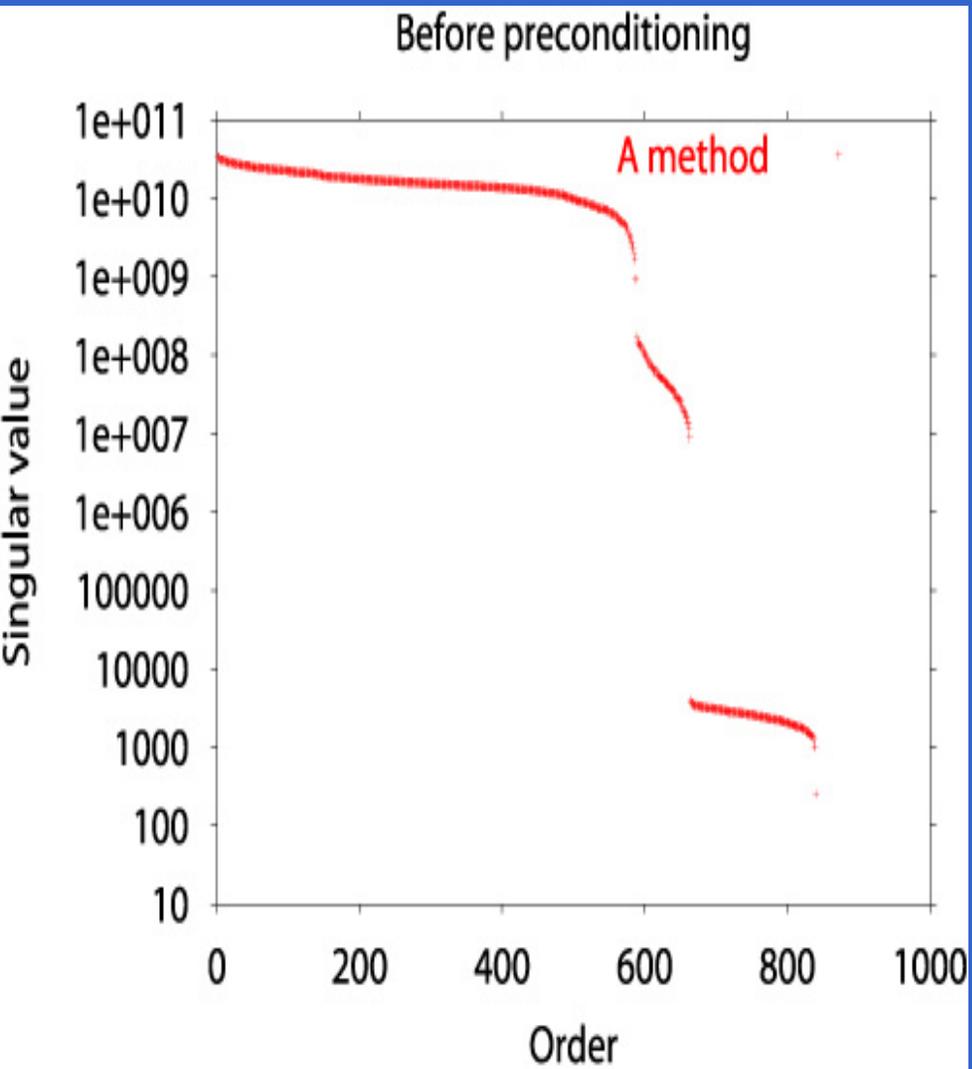




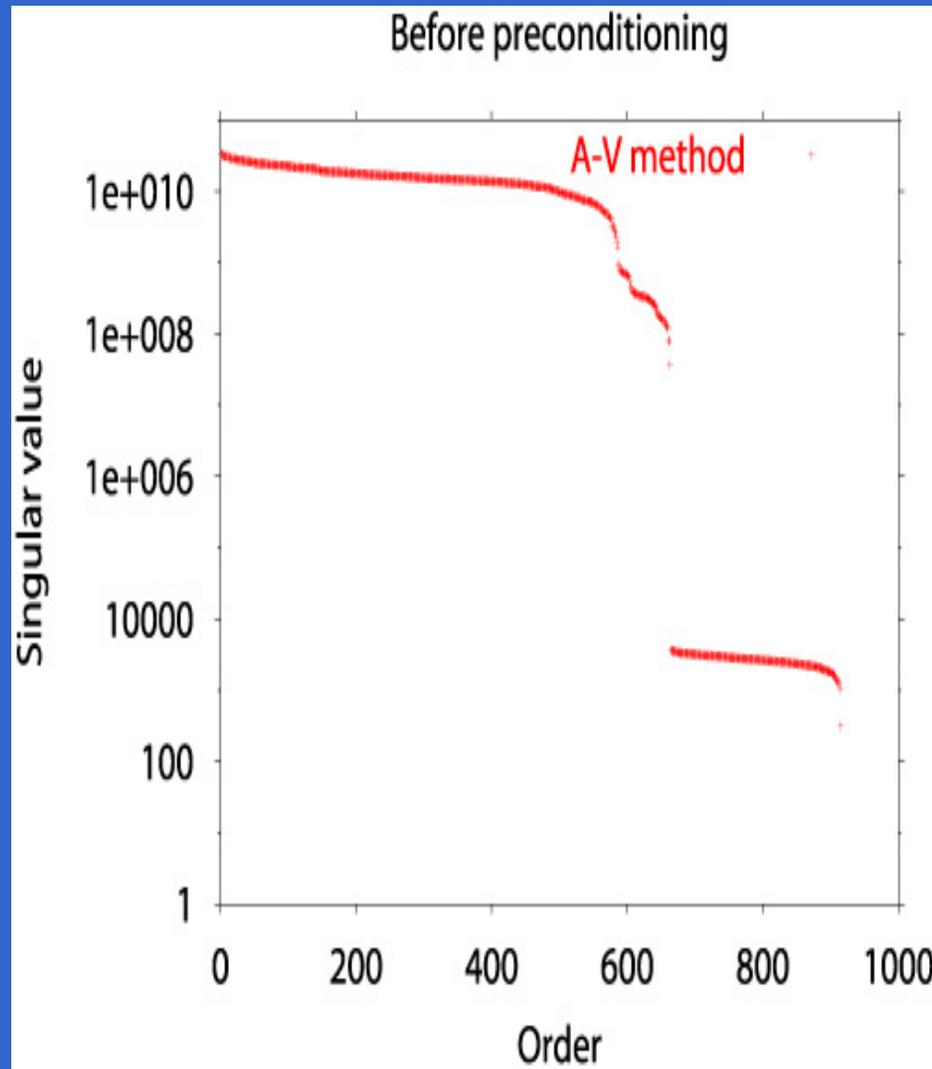
A法



A-V法

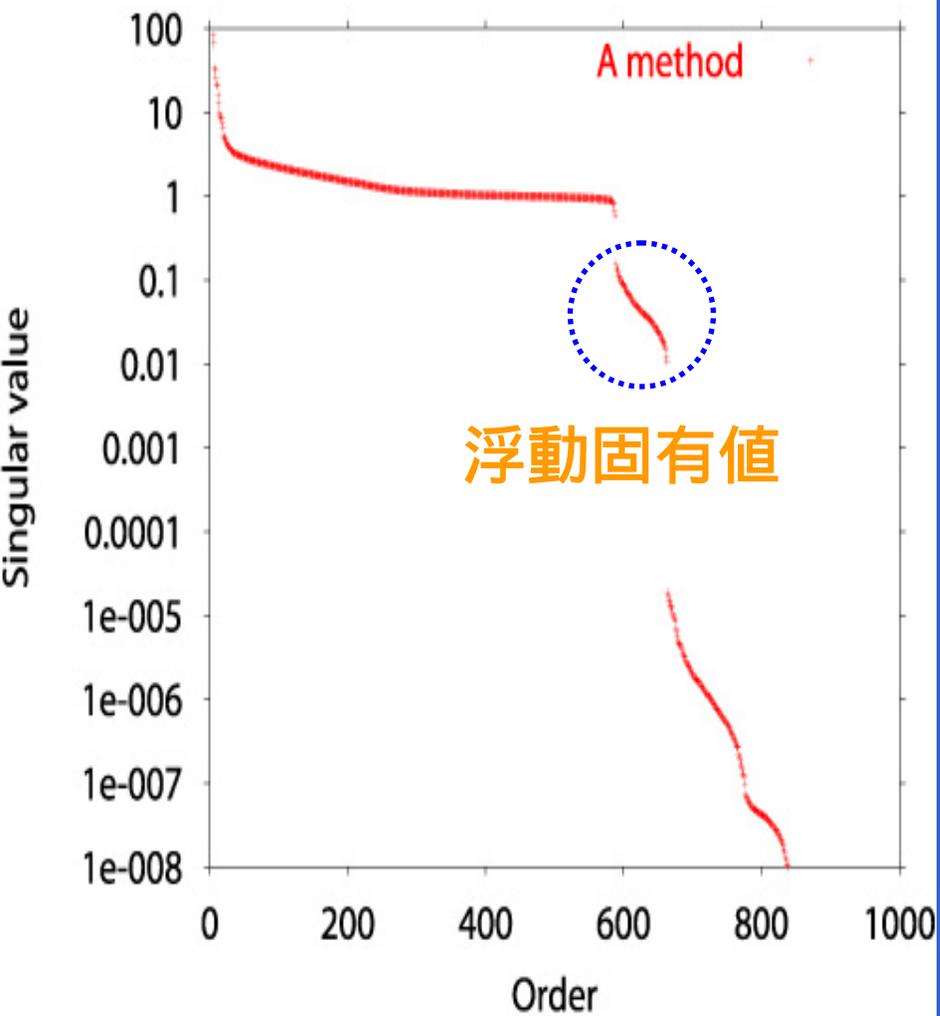


$$\kappa = 3768$$

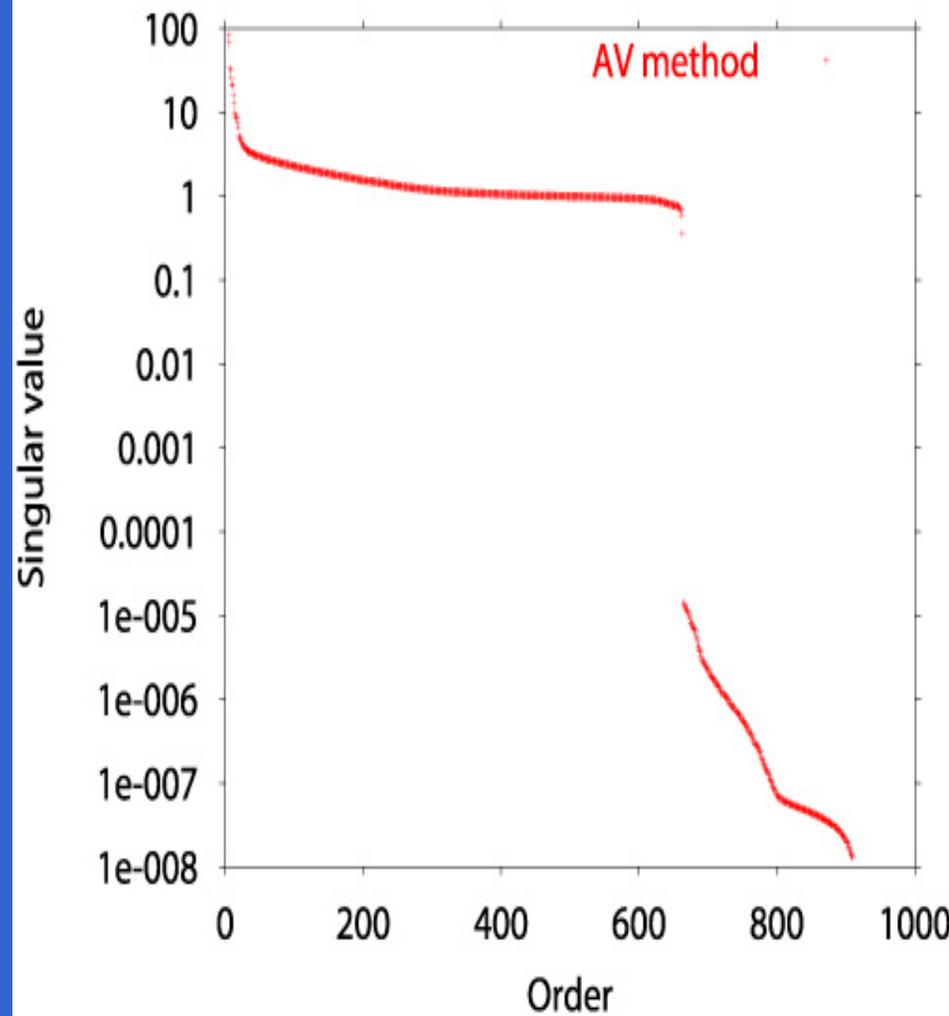


$$\kappa = 899$$

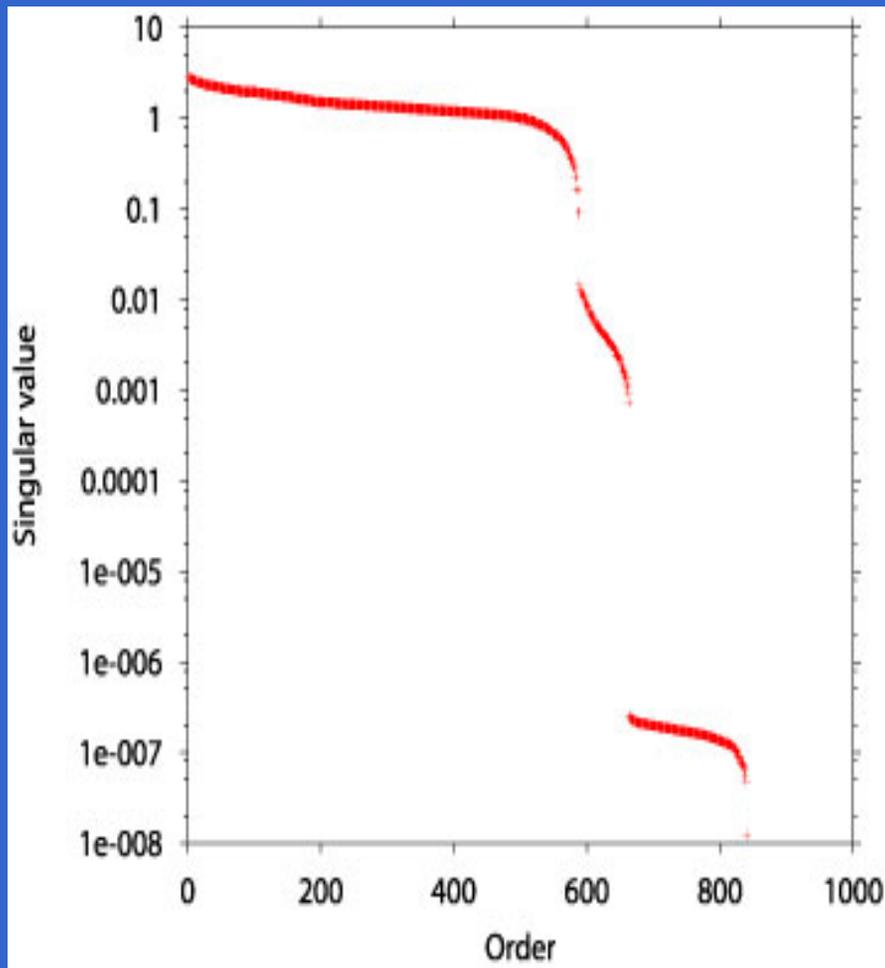
After preconditioning



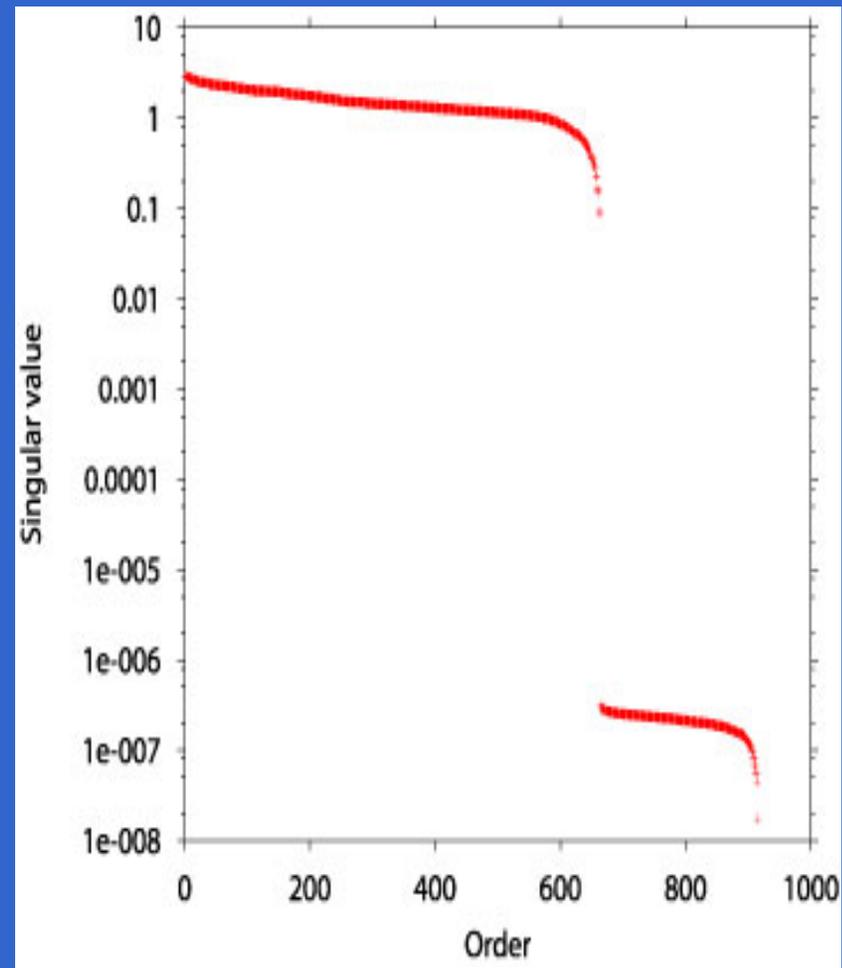
After preconditioning



対角スケーリング後



A法



A-V法

A simple example

A method

$$[K] = [C]^t [v] [C] + j\omega [\sigma]$$



Simplification

$$[k] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = 1/\beta$$

A method

$$[k] = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & 2 \\ 2 & 4 + \varepsilon \end{bmatrix}$$

Diagonal scaling

$$\tilde{k}_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sqrt{|k_{ii}k_{jj}|}}$$



$$[\tilde{k}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{(1 + \varepsilon)(4 + \varepsilon)}} \\ \frac{2}{\sqrt{(1 + \varepsilon)(4 + \varepsilon)}} & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A method

$$[\tilde{k}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{(1+\varepsilon)(4+\varepsilon)}} \\ \frac{2}{\sqrt{(1+\varepsilon)(4+\varepsilon)}} & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ε	0	0.01
eigenvalues	0	0.0062
	2	1.9938

A simple example

A-V method

$$[K'] = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & 2 & 2\varepsilon \\ 2 & 4 + \varepsilon & -\varepsilon \\ 2\varepsilon & -\varepsilon & 5\varepsilon \end{bmatrix}$$

After scaling

$$[\tilde{K}'] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{(1 + \varepsilon)(4 + \varepsilon)}} & 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{5(1 + \varepsilon)}} \\ & 1 & -\sqrt{\frac{\varepsilon}{5(4 + \varepsilon)}} \\ \text{Sym.} & & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

A-V method

$$[\tilde{K}'] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{(1+\varepsilon)(4+\varepsilon)}} & 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{5(1+\varepsilon)}} \\ & 1 & -\sqrt{\frac{\varepsilon}{5(4+\varepsilon)}} \\ \text{Sym.} & & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ε	0	0.01
eigenvalues	0 1 2	0 1.0040 1.9960

Effect of diagonal scaling

$$[K'] \equiv \begin{bmatrix} [C]^t[v][C] + j\omega[\sigma] & j\omega[\sigma][G] \\ j\omega[G]^t[\sigma] & j\omega[G]^t[\sigma][G] \end{bmatrix}$$

Diagonal scaling



$$[\tilde{K}'] \approx \begin{bmatrix} [\tilde{K}_0] & [0] \\ [0]^t & [\tilde{K}_1] \end{bmatrix}$$

eigenvalues

number

$$\lambda_i \approx 1$$

e-n+1

$$\lambda_i \approx 1$$

n-1

$$\lambda_i = 0$$

n

total

e+n=dim [K']

ICCGの収束性

- AV法では前処理(対角スケーリング)により浮動固有値を正規化している。
- A法では前処理(対角スケーリング)で浮動固有値を正規化できない

浮動固有値の正規化=収束性の改善には
冗長な変数 V が必要

結論

- 静磁場解析の場合, 自由度消去による正則化を行うと最小固有値が減少し, 条件数が悪化する(場合が極めて多い). よって特異システムをそのままCG法で解いた方がよい.
- 準定常磁場解析の場合, 冗長な定式化によって前処理の効果が高められる.

計算電磁気学の重要課題 (私見)

- (1) 誤差の局所(要素)評価
- (2) 大域量(エネルギー, 固有値など)の上下限評価
- (3) 非構造メッシュに対する陽解法 (FDTDの一般化)
- (4) ICよりロバストで効率のよい前処理法
- (5) 高速解法